УДК 621.1

*А.П.Солодов*

Московский энергетический институт (технический университет), Россия

# КОМПЬЮТЕРНАЯ МОДЕЛЬ ПУЗЫРЬКОВОГО КИПЕНИЯ

## АННОТАЦИЯ

Компьютерная модель на базе системы обыкновенных дифференциальных уравнений воспроизводит экспериментальные данные по кипению в широком диапазоне давлений. Плотность центров парообразования определена на основе фрактального представления шероховатых поверхностей нагрева.

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Известен список отдельных механизмов пузырькового кипения: нестационарный прогрев жидкости при возобновляющемся контакте со стенкой, зарождение пузырьков на активных центрах парообразования, рост пузырьков в перегретой жидкости, испарение тонкой пленки под пузырьками.

Из этих элементарных механизмов конструируется комплексная компьютерная модель пузырькового кипения, способная воспроизвести экспериментальные данные в широком диапазоне параметров, в том числе давления [1]. Для расчета плотности центров парообразования $N$ предлагается [1] *фрактальное* представление шероховатых поверхностей нагрева с *фрактальной размерностью* до 3.

Существуют три характерных размера при пузырьковом кипении: критический радиус пузырьков $R_{cr}$, расстояние между активными центрами парообразования $L \sim 1/\sqrt{N}$ , отрывной радиус пузырьков $R_d$. Для интенсивного кипения имеет место соотношение масштабов: $R_{cr} \ll L \ll R_d$ , следствием чего будут многочисленные слияния пузырьков, прежде чем они достигнут отрывного размера.

Ранее [2,3] мы рассмотрели статистику капельной конденсации для аналогичных процессов непрерывного роста (за счет фазового превращения), перемежающегося скачкообразным изменением размеров при слияниях. Здесь используется основной результат статистической модели, согласно которому популяция пузырьков с размерами порядка расстояния $L$ между центрами парообразования является *наиболее представительной*, т.е. при $R \approx L$ имеется *максимум* на функции распределения пузырьков по размерам. Поэтому можно ограничиться анализом роста пузырьков указанных размеров $R \approx L$. В простейшей реализации принимается, что пузырьки размером $R < L$ растут непрерывно благодаря испарению, а при достижении *характерного размера* $R_m = L$ происходят многочисленные слияния, поверхность высвобождается, возобновляется контакт стенки с холодной жидкостью и процесс повторяется.

Тепловой поток $q$ к жидкости принимается постоянным, что соответствует кипению при электрообогреве. На стенке имеют место температурные пульсации. *Время ожидания* $t_{wait}$ понимается как период, в течение которого перегрев жидкости $\theta(t)$ достигает уровня $\theta(t_{wait})$, определяющего актуальную плотность центров парообразования $N$.

При последующем возникновении и росте пузырьков температурное поле $\theta(x, t)$ на поверхности становится пространственно неоднородным. Глобальное усреднение дает среднюю величину перегрева стенки $\theta_m$ и среднюю величину коэффициента теплоотдачи $\alpha = q / \theta_m$. Перегрев, достигаемый за время $t_{wait}$, $\theta(t_{wait}) = \theta_m$, определяет плотность активных центров $N$.

## 2. ПЕРЕГРЕВ ЖИДКОСТИ

Нестационарная теплопроводность в полуограниченном массиве применяется как модель теплоотвода при *возобновляющемся контакте* «холодной» (при температуре $T_s$) жидкости со стенкой. Известное аналитическое решение при заданном тепловом потоке представляется ступенчатым профилем: перегрев $\theta(t)$ сосредоточен в пределах слоя *толщины потери энтальпии* $\delta_w$:

$$\delta_w(t) = \sqrt{\frac{\pi}{4}}\sqrt{a_l t} \quad , \qquad q = \left(\frac{\pi}{4}\frac{\lambda_l}{\delta_w(t)}\right)\theta(t), \qquad (1)$$

где величина в скобках есть термическая проводимость, зависящая от времени контакта и теплофизических свойств кипящей жидкости.

Аналогичным способом рассчитывается теплоподвод через сферическую границу пузырька с перегретой жидкостью. Однако для толщины оболочки $\delta_{sh}(t)$ составляется специальное дифференциальное уравнение (9).

## 3. БЕЗРАЗМЕРНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

Безразмерное представление получают, используя в качестве масштабов максимальный радиус пузырька $R_m$ и приведенную скорость парообразования $w = q/h_{vl}\rho_v$:

$$R_r \equiv \frac{R}{R_m};\, t_r \equiv \frac{t\,w}{R_m};\, \delta_{sh\_r} \equiv \frac{\delta_{sh}}{R_m};\, \Theta \equiv \frac{\theta\lambda_l}{q\,R_m}, \quad (2)$$

$$\mathrm{Re}_l \equiv \frac{wR_m}{\nu_l} = \frac{qR_m}{h_{vl}\rho_v\nu_l}\,; \quad \Theta\,\mathrm{Re}_l = \theta\frac{\rho_l c_{pl}}{\rho_v h_{vl}\mathrm{Pr}_l}, \quad (3)$$

где индексы «$v$» и «$l$» означают пар и жидкость; $h_{vl}$ – теплота парообразования. Вариации $\mathrm{Re}_l$ значительны: от $\mathrm{Re}_l \gg 1$ при умеренных давлениях до $\mathrm{Re}_l \ll 1$ при высоких давлениях кипения.

## 4. ПЛЕНКА ПОД ПУЗЫРЬКОМ

Для режимов кипения с *большими значениями* $\mathrm{Re}_l$ образование остаточной пленки под пузырьком пара определяется взаимодействием инерционных и вязких эффектов в пристенном течении жидкости, вызванном ростом пузырька. Толщина жидкой пленки, отождествленная с *толщиной потери импульса* радиального пограничного слоя под растущим пузырьком, оценивается по уравнению [1, 4]:

$$\delta_{F0}(x) = C\sqrt{\nu_l \cdot t(R = x)}; \quad C = 0.383\,, \tag{4}$$

где $t(R = x)$ – момент времени, в который край пузырька проходит над точкой с координатой $x$. Изменение толщины пленки вследствие испарения, как и размер сухого пятна, определяется уравнением:

$$\delta_F(x,t) = -\frac{q}{h_{vl}\rho_l}(t - t(R = x)) + \delta_{F0}(x)\,. \tag{5}$$

В области *малых чисел* $\mathrm{Re}_l$ (кипение при большом давлении) остаточный слой жидкости формируется при *ползущем* пуазейлевском течении вязкой жидкости, вытесняемой растущим пузырьком пара. Модельная задача такого рода описывается уравнением:

$$\frac{\partial h}{\partial\left(t/\mathrm{Ca}\right)} = -\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{h^4}{\varepsilon + h}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}\right)\right), \tag{6}$$

см., например, [5], где $h$ и $t$ – безразмерные толщина пленки и время; $\mathrm{Ca} = 3\mu w/\sigma$ – капиллярное число, соотношение вязких и капиллярных сил, малая величина для режимов кипения при высоком и умеренном давлении; $\varepsilon \to 0$ – параметр регуляризации.

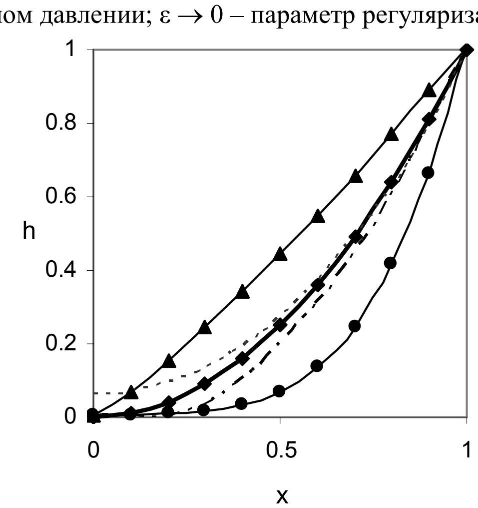


Рис. 1. Релаксация сплющенного (•) или вытянутого (♠) пузырька к равновесной (♦) форме (вертикальная ось – ось симметрии)

Численное интегрирование (6) показывает, что значительные деформации равновесного профиля исчезают благодаря действию капиллярного давления за время порядка $t/\mathrm{Ca} \sim 1$ (Рис. 1, штрихпунктирная и пунктирная линии соответственно для первоначально сильно сплющенного или вытянутого пузырька). Эта оценка в размерном виде означает, что при $\mathrm{Ca} \ll 1$ время релаксации много меньше характерного времени роста пузырька $R_m/w$.

Аналогичный результат получается для *перемещающегося* с постоянной скоростью двухфазного фронта, имитирующего рост пузырька. Полагая, что эволюция сводится к масштабированию, переходят от (6) к обыкновенному дифференциальному уравнение четвертого порядка:

$$\mathrm{Ca}\left(H(\eta) - \eta H'(\eta)\right) = -\left(H(\eta)^3 K'(\eta)\right)', \tag{7}$$

где $H$, $K$, $\eta$ – автомодельные переменные, соответственно толщина пленки, кривизна поверхности и координата. В результате численного интегрирования (7) получено, что при $\mathrm{Ca} = 5$ (поверхностное натяжение относительно мало) имеют место заметные отклонения от равновесного круглого профиля (Рис. 2). Наблюдается своеобразное аквапланирование: жидкость не успевает вытекать из-под надвигающегося профиля растущего пузырька. Однако при $\mathrm{Ca} = 0.1$ отклонения становятся уже незаметными.

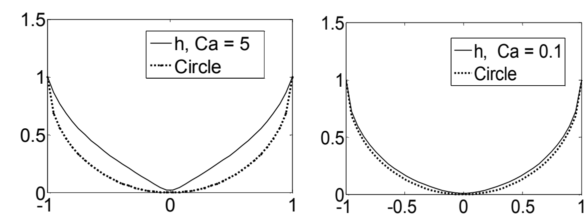


Рис. 2. Автомодельные решения

Эти расчеты служат демонстрацией того, как при $\mathrm{Ca} \ll 1$ формируется квазистатический, сферический пузырек у стенки. Напомним, что одновременно принимается соотношение порядка $\mathrm{Re}_l \ll 1$. В компьютерной программе применялась следующая логическая схема. Если $\mathrm{Re}_{loc} > \mathrm{Re}_b$ , то использовалась полусферическая конфигурация пузырька с инерционно–вязкостной пленкой, иначе принималась сферическая конфигурация. Граничное значение $\mathrm{Re}_b \approx 1$; локальное значение $\mathrm{Re}_{loc}$ вычислялось по мгновенной скорости роста и размеру пузырька.

## 5. РОСТ ПУЗЫРЬКА

Тепловой рост пузырька представлен системой двух обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\frac{dt_r}{dR_r} = \frac{\delta_{sh\_r}}{C_w\delta_{sh\_r} + C_{sh}\Theta\left(t_r\right)D_\delta}\,; \tag{8}$$

$$\frac{d\delta_{sh\_r}}{dR_r} = -2\frac{\delta_{sh\_r}}{R_r} + \frac{D_\delta\left(\dfrac{1}{\mathrm{Re}_l\mathrm{Pr}_l} - \rho_{v\_l}\Theta\left(t_r\right)\right)}{C_w\delta_{sh\_r} + C_{sh}\Theta\left(t_r\right)D_\delta}\,. \tag{9}$$

Независимой переменной является радиус пузырька $R_r = 0 \div 1$, зависимыми переменными – время роста $t_r$ и толщина тепловой оболочки $\delta_{sh\_r}$. Теплота передаётся пузырьку через его основание от стенки и через сферическую поверхность пузырька (или ее часть при $R > \delta_w$) от перегретой жидкости. Уравнение (9) описывает эволюцию толщины тепловой оболочки пузырька $\delta_{sh\_r}$. Дополнительные комментарии к системе (8), (9) можно найти в [1].

При $\mathrm{Re}_l << 1$ и для $R_r \sim 1$ возможен перенос тепла от стенки к пузырьку в режиме квазистационарной теплопроводности, как показывает численное решение для модельной задачи со сферой фиксированного радиуса (Рис. 3). Градиенты температуры и тепловые потоки *локализованы* в клиновидной зоне у основания пузырька. Такое распределение характерно для относительно крупных пузырьков $R/R_m \geq 0.2$. Полученные числовые аппроксимации включены в компьютерную модель для соответствующих режимов кипения.

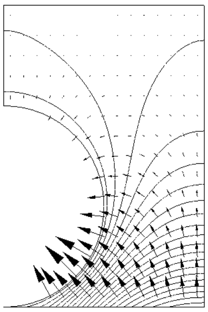

Рис. 3. Теплопроводность вблизи сферического пузырька на стенке

## 6. ФРАКТАЛЬНАЯ ПРИРОДА ПОВЕРХНОСТИ

Для плотности центров $N$, м$^{-2}$, анализ размерностей приводит к соотношению Лабунцова [6]: $N \sim R_{cr}^{-2}$, откуда следует $L \sim R_{cr}$, где коэффициент пропорциональности должен быть большим числом, зависящим от степени шероховатости.

Величину $N$ можно понимать как число структурных элементов шероховатой поверхности с некоторым характерным размером $\Re$. Измерения площади адсорбционными методами выявили *фрактальный характер* различных поверхностей, в соответствии с уравнением (10) (см., например, [7]):

$$N \propto \Re^{-D}, \tag{10}$$

где $D$ – фрактальная размерность, $2 \leq D \leq 3$. В случае кипения нас интересуют активные центры парообразования, и характерный размер $\Re$ может быть отождествлён с $R_{cr}$. Уравнение (10) применяется теперь для плотности активных центров $N$ и критического радиуса $R_{cr}$. При $D = 2$, т.е. для обычных, двухмерных поверхностей, мы получаем снова формулу Лабунцова $N \sim R_{cr}^{-2}$.

В общем случае из соотношений $L \sim 1/\sqrt{N}$ и (10) следует уравнение, учитывающее фрактальный характер поверхности нагрева:

$$L = C_{rough} \left( \frac{R_{cr}}{R_s} \right)^{\left( \frac{D-2}{2} \right)} R_{cr}, \tag{11}$$

где $R_s$ – линейный масштаб для шероховатости, $C_{rough}$ – безразмерный коэффициент. Фрактальная размерность $D$ принималась равной 2 или 3 в последующих вариантных расчетах.

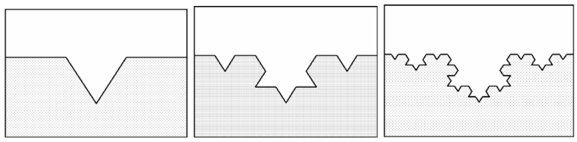

Рис. 4. Треугольная кривая Коха

Пример фрактальной поверхности, известной как треугольная кривая Коха (Рис. 4) с $D = 2.26$, показывает, что с уменьшением размера зародышевых пузырьков $R_{cr}$, т.е. с увеличением перегрева и давления, поверхность представляется все более «изрезанной», «шероховатой».

## 7. ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ

Алгоритм вычислений, реализованный в математическом пакете Mathcad [8], кратко представляется следующим образом. Задается $\mathrm{Re}_l$ как основной режимный параметр. При некотором пробном значении времени ожидания $t_{wait}$ рассчитывается перегрев, расстояние между центрами, выполняется численное интегрирование системы (8), (9), определяется время роста пузырьков, рассчитывается температурное поле $\theta(x,t)$ на поверхности (Рис. 5).

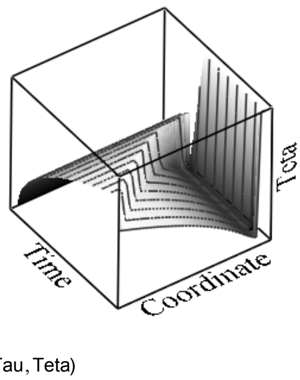


Рис. 5. Пространственно-временное распределение перегрева стенки

Специальная вычислительная процедура находит значение $t_{wait}$, которое удовлетворяет обсуждавшемуся во введении условию $\theta(t_{wait}) = \theta_m$.

Две характерные конфигурации с полусферическим и сферическим пузырьком представлены на Рис. 6. Затемненная область соответствует перегретой жидкости.

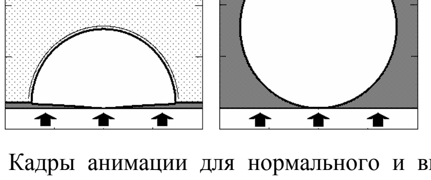


Рис. 6. Кадры анимации для нормального и высокого давления

## 8. РЕЗУЛЬТАТЫ

Приведем результаты расчета коэффициента теплоотдачи при кипении воды для давлений 1, 100 и 200 бар (Рис. 7). Фрактальная размерность $D$ была равна 2 (пунктирные линии с мелкими затемненными символами) или 3 (сплошные линии с мелкими затемненными символами). Постоянная $C_{rough}$ (11) в обоих случаях юстировалась по экспериментам [9, 10] *при атмосферном давлении* (2300 при $D = 2$, 1600 при $D = 3$). Масштаб $R_s$ принят равным $10^{-6}$ м и не оптимизировался. Граничное число Рейнольдса было принято равным единице, $Re_b = 1$.

Экспериментальные данные [9, 10] представлены тремя кластерами точек (Рис. 7) для различных давлений. Видно, что компьютерная модель правильно воспроизводит характер зависимости теплоотдачи от плотности теплового потока и от давления. Однако для $D = 2$ расхождения с экспериментом при повышенном давлении остаются значительными, в то время как при $D = 3$ компьютерная модель хорошо воспроизводит экспериментальные данные *при всех давлениях*.

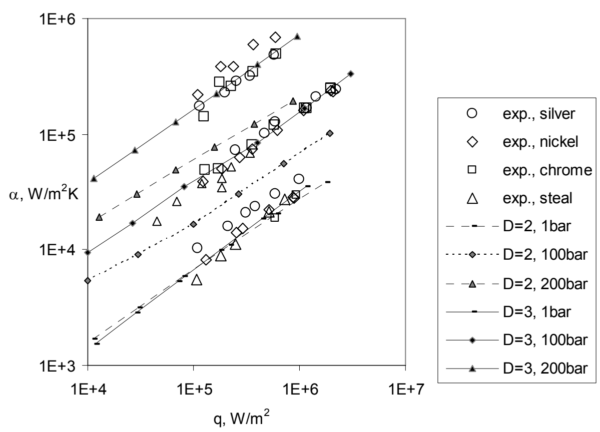


Рис. 7. Сравнение компьютерной модели с экспериментальными данными

Расчетные результаты были сопоставлены также с теорией Лабунцова [11], которая в идейном отношении была исходным пунктом при построении нашей компьютерной модели (подробнее см. в [1]).

Общий вывод состоит в том, что фрактальное описание поверхности нагрева улучшает расчетную модель, благодаря адекватному описанию плотности центров парообразования.

В заключение приведем сравнение внутренних характеристик модели с прямыми измерениями температурных пульсаций при кипении воды при атмосферном давлении.

Поскольку координата закладки микротермопары в [12] не коррелирована с расположением пузырьков, опытные данные сопоставлялись с мгновенными, но осредненными по поверхности расчетными значениями температуры стенки (Рис. 8). Демпфирование температурных пульсаций в стенке учитывалось посредством численного интегрирования нестационарного уравнения теплопроводности с равномерно распределенными объемными источниками, имитирующими Джоулево тепловыделение в нихромовом нагревателе. Удовлетворительное согласование внутренних характеристик, а именно, периода пульсаций, общей конфигурации сигнала и, с учетом демпфирующего эффекта, амплитуды подтверждает модельные представления.

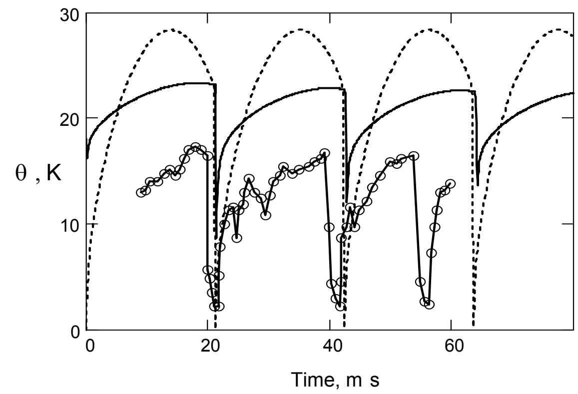


Рис. 8. Температурные пульсации: эксперимент [12] – маркированная кривая, модель – пунктирная линия, модель + демпфирование – сплошная кривая

## СПИСОК ОБОЗНАЧЕНИЙ

$C_w$, $C_{sh}$, $D_\delta$ – коэффициенты в (8), (9) ;
$C_{rough}$ – коэффициент в (11) ;
$D$ – фрактальная размерность;
$q$ – плотность теплового потока, Вт/м$^2$;
$R$ – радиус пузырька, м;
$t$ – время, с;
$x$ – координата, м;
$\alpha$ – коэффициент теплоотдачи, Вт/(м$^2$·К);
$\theta$ – перегрев, К.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Solodov A.P.** Computer Model of Nucleate Boiling. In: Convective Flow and Pool Boiling. 1999. Taylor & Francis. Philadelphia. P. 231–238
2. **Солодов А.П., Исаченко В.П.** Статистическая модель капельной конденсации // ТВТ. 1967. Т.5. № 6. С. 1032–1039.
3. **Асимптотический** анализ капельной конденсации / В.П. Исаченко, А.П. Солодов, А.П. Мальцев, Е.В. Якушева // ТВТ. 1984. Т.22. № 5. С. 924 - 932.
4. **Koffman L.D., Plesset M.S.** Experimental Observations of the Microlayer in Vapor Bubble Growth on a Heated Solid// Journal of Heat Transfer. 1983.Vol.105. No. 3. P. 625–632.
5. **Bertozzi A.L.**, The Mathematics of Moving Contact Lines in Thin Liquid Films // Notices of the AMS. 1998. Vol. 45. No 6. P. 690 – 697.
6. **Лабунцов Д.А.** Приближенная теория теплообмена при развитом пузырьковом кипении // Изв. АН СССР. Энергетика и транспорт. 1963. Т. 1. С. 58-71.
7. **Федер Е.** Фракталы. М.: Мир. 1988. 254 с.
8. **Solodov A.P., Ochkov V.F.** Differential models. An Introduction with Mathcad. Springer Berlin Heidelberg New York. 2004. 232 p.
9. **Головин В.С., Кольчугин Б.А., Лабунцов Д.А.** Экспериментальное исследование теплообмена и критического теплового потока при кипении воды // ИФЖ. 1963. Т. 6. № 2. С. 3 – 7.
10. **Головин В.С., Кольчугин Б.А., Лабунцов Д.А.** Исследование теплообмена и критического теплового потока при кипении воды на поверхностях из различных материалов // Труды ЦКТИ. 1965. № 58. С. 35 – 46.
11. **Лабунцов Д.А.** Вопросы теплообмена при пузырьковом кипении жидкости // Теплоэнергетика. 1972. № 9. С. 14 -19.
12. **Moore F.D., Mesler R.B.** The measurement of rapid surface temperature fluctuations during nucleatee boiling of water // AIChE J. 1961. 7 (4). P. 620 – 624.