УДК 536.25

*С.Г.Черкасов*

Федеральное государственное унитарное предприятие
“Исследовательский центр имени М.В.Келдыша”, Москва, Россия

# ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ БАЛАНСА ЭНЕРГИИ ПРИ СТАЦИОНАРНОЙ ТЕПЛОВОЙ ГРАВИТАЦИОННОЙ КОНВЕКЦИИ

## АННОТАЦИЯ

Рассматривается устройство, которое совершает механическую работу за счет вращения цилиндра силами вязкого трения при естественной конвекции жидкости вокруг цилиндра. Показано, что, как и в обычной тепловой машине, механическая работа совершается за счет разности подводимого и отводимого тепла. Проанализированы составляющие баланса энергии в системе. Получено, что использование для данной задачи приближения Буссинеска приводит к неверному источнику совершения работы — к энергии поля гравитации.

Рассматривается стационарная естественная конвекция в полости произвольной формы, на границах которой поддерживается некоторый перепад температуры. Предположим, что в полости размещен теплоизолированный цилиндр, который может вращаться вокруг продольной оси (см. рис. 1). Очевидно, что при любой пространственной структуре конвективного течения цилиндр можно расположить таким образом, что свободноконвективная циркуляция жидкости вызовет за счет вязкости вращение цилиндра, которое может использоваться для совершения механической работы. Данную систему можно рассматривать как стационарную тепловую машину, функционирующую при наличии гравитационного поля. В отличие от машины Карно рассматриваемая тепловая машина, во-первых, работает не в циклическом, а в непрерывном режиме и, во-вторых, механическая работа совершается посредством необратимого процесса — вязкого трения.

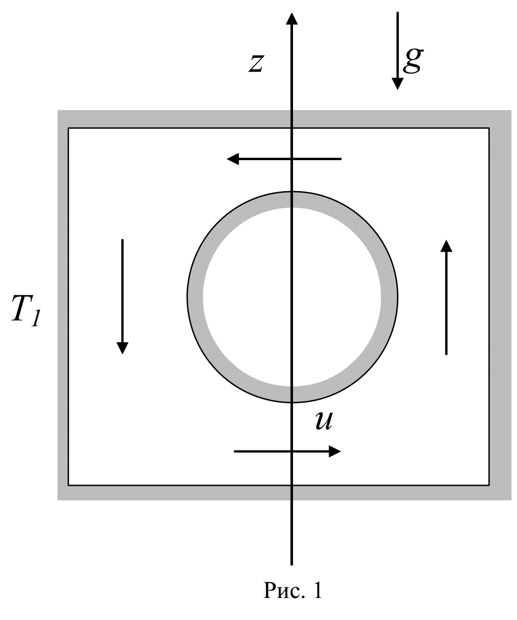


Рис. 1

Обозначим через $A$ механическую работу, совершаемую жидкостью над цилиндром в единицу времени:

$$A = \int_S u_i \tau^{ij} n_j dS \,. \tag{1}$$

Отметим, что в рассматриваемом процессе $A > 0$.

Уравнения, описывающие конвекцию, представим в виде:

$$\nabla_j(\rho u^i u^j) = -\nabla^i p + \rho g^i + \nabla_j \tau^{ij}\,; \tag{2}$$

$$\nabla_j(\rho u^j) = 0\,; \tag{3}$$

$$\nabla_j(\rho e u^j) = -p\nabla^j u_j + \tau^{ij}\nabla_j u_i - \nabla_j q^j\,. \tag{4}$$

Умножая (2) на $u_i$ и используя (3), получим

$$\nabla_j\left(\rho\frac{u^2}{2}u^j\right) = -u_i\nabla^i p + \rho u_i g^i + u_i\nabla_j\tau^{ij}\,. \tag{5}$$

Обозначим через $A_p$ и $A_\tau$ работы, совершаемые в единицу времени в единице объема соответственно силами давления и трения, и представим эти работы в виде:

$$A_p = -\nabla^i(pu_i) = \varphi_1 - \varphi_2\,; \tag{6}$$

$$\varphi_1 = -u_i\nabla^i p\,,\quad \varphi_2 = p\nabla^i u_i\,; \tag{7}$$

$$A_\tau = \nabla_j(\tau^{ij}u_i) = -\psi_1 + \psi_2\,; \tag{8}$$

$$\psi_1 = -u_i\nabla_j\tau^{ij}\,,\quad \psi_2 = \tau^{ij}\nabla_j u_i\,. \tag{9}$$

Интегрируя уравнения (6) и (8) по объему жидкости $V$ и используя теорему Гаусса и условия прилипания на стенках, получим:

$$\int_V \varphi_1 dV = \int_V \varphi_2 dV\,; \tag{10}$$

$$\int_V \psi_1 dV = \int_V \psi_2 dV + A\,. \tag{11}$$

Представим уравнения (4), (5) для внутренней и кинетической энергии в виде:

$$\nabla_j(\rho e u^j) = \psi_2 - \varphi_2 - \nabla_j q^j\,; \tag{12}$$

$$\nabla_j\left(\rho\frac{u^2}{2}u^j\right) = \varphi_1 - \psi_1 + \rho u_i g^i\,. \tag{13}$$

Интегрируя теперь уравнения (12), (13) по объему жидкости (здесь и далее при интегрировании по объему используем теорему Гаусса и условия прилипания на стенках) и складывая результаты, получим:

$$0 = \int_V \psi_2 dV - \int_V \varphi_2 dV + \Delta Q + \\ + \int_V \varphi_1 dV - \int_V \psi_1 dV + B; \tag{14}$$

$$B = \int_V \rho g^i u_i dV . \tag{15}$$

Здесь $\Delta Q = Q_2 - Q_1$ — разность подводимого и отводимого через границы полости тепловых потоков; $B$ — суммарная работа, совершаемая над системой силой тяжести в единицу времени. С учетом формул (10), (11) выражение (14) принимает вид

$$A = \Delta Q + B . \tag{16}$$

Работу силы тяжести можно записать следующим образом:

$$B = -g \int \left( \int_F \rho u_z dF \right) dz , \tag{17}$$

где $F$ — горизонтальное сечение полости на высоте $z$ (ось $z$ направлена вверх); $g$ — величина ускорения массовой силы; $u_z$ — составляющая скорости по оси $z$. Отметим, что интеграл в скобках представляет собой суммарный массовый расход жидкости через сечение $F$ и, согласно уравнению неразрывности (3), равен нулю. Таким образом, сила тяжести не совершает суммарной работы, т.е. работа, совершаемая силой тяжести в области нисходящего движения, компенсируется работой против силы тяжести в области восходящего движения. При этом механическая работа $A$ согласно (16) совершается за счет разности подводимого и отводимого тепла, как и в обычной тепловой машине. Отметим, что, хотя сила тяжести не участвует в интегральном балансе энергии, ее наличие — это обязательное условие функционирования рассматриваемой тепловой машины, т.е. сила тяжести играет роль катализатора процесса.

Рассмотрим теперь баланс энергии по элементам. Заметим, что параметр $\psi_2$ (вязкая диссипация) всегда положителен, поэтому в уравнении для внутренней энергии (12) параметр $\psi_2$ всегда является источником. При этом из равенства (11) следует

$$\int_V \psi_1 dV = \int_V \psi_2 dV + A > 0 . \tag{18}$$

Таким образом, в интегральном смысле параметр $\psi_1$ является стоком в уравнении для кинетической энергии (13). Далее, интегрируя уравнение (13) и учитывая равенство нулю суммарной работы силы тяжести и формулу (10), получим

$$\int_V \varphi_1 dV = \int_V \psi_1 dV > 0 . \tag{19}$$

Интегрируя теперь по объему уравнение (6), получим еще одно неравенство:

$$\int_V \varphi_2 dV = \int_V \varphi_1 dV > 0 . \tag{20}$$

Таким образом, в интегральном смысле параметр $\varphi_1$ является источником в уравнении для кинетической энергии (13), а параметр $\varphi_2$ — стоком в уравнении для внутренней энергии (12). Полученные результаты показывают, что интегральный переход тепловой энергии в механическую происходит за счет работы сил давления, а обратный переход — за счет работы сил трения. В локальных же переходах энергии роль силы тяжести существенна. Отметим также, что в частном случае $A = 0$ (цилиндр неподвижен либо вообще отсутствует) суммарное тепло, выделяющееся из-за вязкой диссипации, полностью поглощается той частью работы сил давления, которая связана с расширением и сжатием жидкости.

Для описания естественной конвекции часто используется приближение Буссинеска [1, 2]. Применим проведенный выше анализ к случаю, когда рассматриваемая задача решается в этом приближении. Уравнения стационарной конвекции в приближении Буссинеска можно представить в виде:

$$\rho_0 \nabla_j (u^i u^j) = -\nabla^i p' - \rho_0 g^i \beta T' + \nabla_j \tau^{ij} ; \tag{21}$$

$$\nabla_j u^j = 0 ; \tag{22}$$

$$\rho_0 c_p \nabla_j (u^j T') = -\nabla_j q^j . \tag{23}$$

Здесь $p'$ — отклонение давления от гидростатического давления в однородно прогретой жидкости с температурой $T_0$; $T'$ — отклонение температуры от температуры $T_0$; $\rho_0$ — плотность жидкости при температуре $T_0$; $c_p$ — удельная теплоемкость жидкости, $\beta$ — коэффициент теплового расширения. Уравнения (21)—(23) можно получить из соответствующих уравнений для несжимаемой жидкости с плотностью $\rho_0$, если пренебречь вязкой диссипацией, а массовую силу представить в виде

$$\rho g^i = g^i (\rho_0 + (\rho - \rho_0)) = g^i \rho_0 (1 - \beta T') . \tag{24}$$

Используя (24), преобразуем (21) и (23) к виду:

$$\nabla_j \left( \rho_0 \frac{u^2}{2} u^j \right) = -u_i \nabla^i p + \rho u_i g^i + u_i \nabla_j \tau^{ij} ; \tag{25}$$

$$\nabla_j (\rho_0 c_p u^j T') = -\nabla_j q^j . \tag{26}$$

Используем теперь уравнения (22), (25), (26) для описания процессов в рассматриваемой тепловой машине. Интегрируя (26) по объему, получим, что $\Delta Q = 0$. Таким образом, подводимое к системе тепло, равно отводимому, независимо от величины работы $A$. Далее легко показать, что, если использовать уравнение неразрывности в форме (22), будет иметь место равенство

$$\int_V u_i \nabla^i p dV = \int_V \nabla^i (u_i p) dV = 0 . \tag{27}$$

Таким образом, в рамках приближения Буссинеска силы давления являются нулевым интегральным источником в уравнении для кинетической энергии. Интегрируя теперь по объему уравнение (25), получим, учитывая (27):

$$A = B - \int_V \tau^{ij} \nabla_j u_i dV ; \tag{28}$$

$$B = \int_V \rho g^i u_i dV = -\int_V \rho g u_z dV . \tag{29}$$

Рассмотрим в рамках приближения Буссинеска работу силы тяжести. Представим, учитывая (24), работу силы тяжести в следующем виде:

$$B = -g\rho_0 \int \left( \int_F u_z dF - \beta \int_F u_z T' dF \right) dz . \tag{30}$$

При уравнении неразрывности в форме (22) только первый интеграл в скобках в выражении (30) равен нулю, поэтому в модели Буссинеска сила тяжести совершает не только локальную, но и интегральную работу. Поскольку интеграл в формуле (28) — величина существенно положительная, то единственным источником совершения полезной механической работы $A$ является работа силы тяжести.

Таким образом, в рамках приближения Буссинеска рассматриваемая тепловая машина совершает механическую работу за счет извлечения энергии из поля гравитации. Более того, как следует из уравнения (28), работа, совершаемая силой тяжести, превышает механическую работу на величину, равную интегральной вязкой диссипации. Поскольку в рамках приближения Буссинеска вязкая диссипация в уравнении для внутренней энергии не учитывается, то в этой модели суммарная подводимая к системе энергия превышает отводимую. Если же «уточнить» модель Буссинеска путем учета вязкой диссипации, то уравнение (26) будет иметь вид

$$\nabla_j (\rho_0 c_p u^j T') = -\nabla_j q^j + \tau^{ij} \nabla_j u_i . \tag{31}$$

Интегрируя (31) по объему, получим

$$\Delta Q = -\int_V \tau^{ij} \nabla_j u_i dV . \tag{32}$$

Отметим, что подынтегральное выражение в (32) представляет собой диссипативную функцию, которая существенно положительна. Поэтому $\Delta Q$ будет отрицательной величиной, т.е. отводимое от системы тепло будет больше подводимого. Если из уравнения (28) вычесть уравнение (32), получим выражение для интегрального баланса энергии в виде

$$B = A - \Delta Q . \tag{33}$$

Формула (33) означает, что подводимая к системе энергия после введения в приближение Буссинеска «поправки» стала равна отводимой энергии, т.е. интегральный баланс энергии выполняется. Однако с учетом знака $\Delta Q$ подводимой энергией является работа силы тяжести, а отводимой — механическая работа и тепло, т.е. в рамках «уточненного» приближения Буссинеска рассматриваемая машина позволяет извлекать из поля гравитации не только механическую работу, но и тепловую энергию. Как показано выше, данные результаты совершенно неверны и возникают, очевидно, вследствие специфики некоторых упрощений приближения Буссинеска.

Рассмотрим теперь случай, когда внутренний цилиндр неподвижен или вообще отсутствует, т.е. обычную ситуацию стационарной естественной конвекции в замкнутой полости.. Как следует из полученных выше формул, в рассматриваемом случае подводимое к системе тепло равно отводимому. Это означает, что для поддержания стационарного конвективного движения вязкой среды не требуется суммарного подвода энергии извне. Однако для поддержания такого движения необходимы одновременные теплоподвод и теплоотвод ($Q_1 = Q_2 = = Q \neq 0$), причем подводиться тепло должно при более высокой температуре, чем отводиться. Этот эффект — следствие уже не первого, а второго начала термодинамики. Уравнение дли энтропии [1] в рассматриваемом случае можно представить в следующем виде:

$$\nabla_j (\rho s u^j) = \frac{1}{T} (\tau^{ij} \nabla_j u_i - \nabla_j q^j) . \tag{34}$$

Здесь $s$ — удельная энтропия. Интегрируя это уравнение по объему с учетом граничных условий, получим после преобразований

$$Q\left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2}\right) = \int_V \left( \frac{1}{T} \tau^{ij} \nabla_j u_i - \frac{q^j \nabla_j T}{T^2} \right) dV . \tag{35}$$

Здесь $Q$ — подводимое к системе в единицу времени тепло (равное отводимому теплу); $T_1$ — температура границы полости, через которую тепло отводится; $T_2$ — температура границы полости, через которую тепло подводится. Поскольку интеграл в правой части уравнения (35) существенно положителен, равенство (35) возможно только при условиях $Q \neq 0$, $T_2 > T_1$. Еще раз отметим, что данный результат — следствие не первого, а второго начала термодинамики и указывает на механизм компенсации увеличения энтропии вследствие диссипативных процессов в рассматриваемой стационарной задаче конвекции.

## СПИСОК ОБОЗНАЧЕНИЙ

$A$ — работа, совершаемая жидкостью над цилиндром в единицу времени, Вт;
$S$ — поверхность цилиндра, м$^2$;
$u_i$ — компоненты скорости, м/с;
$\tau^{ij}$ — компоненты тензора касательных напряжений, Н/м$^2$;
$n_j$ — компоненты внешней нормали к поверхности цилиндра;
$\rho$ — плотность, кг/м$^3$;
$p$ — давление, Н/м$^2$;
$g^i$ — компоненты ускорения силы тяжести, м/с$^2$;
$e$ — удельная внутренняя энергия, Дж/кг;
$q^j$ — компоненты вектора удельного теплового потока, Вт/м$^2$;
$A_p$ — работа, совершаемая в единицу времени в единице объема силами давления, Дж/(м$^3$·с);
$A_\tau$ — работа, совершаемая в единицу времени в единице объема силами трения, Дж/(м$^3$·с);
$V$ — объем, занимаемый жидкостью, м$^3$;
$Q_1$ — отводимый от полости тепловой поток, Вт;
$Q_2$ — подводимый к полости тепловой поток, Вт;
$\Delta Q$ — разность подводимого и отводимого через границы полости тепловых потоков, Вт;
$B$ — суммарная работа, совершаемая над системой силой тяжести в единицу времени, Вт;
$z$ — координата, направленная вверх, м$^2$;
$F$ — горизонтальное сечение полости на высоте $z$, м$^2$;
$g$ — величина ускорения массовой силы, м/с$^2$;
$u_z$ — составляющая скорости по оси $z$, м/с;
$p'$ — отклонение давления от гидростатического давления в однородно прогретой жидкости с температурой $T_0$, Н/м$^2$;
$T'$ — отклонение температуры от температуры $T_0$, К;
$\rho_0$ — плотность жидкости при температуре $T_0$, кг/м$^3$;
$c_p$ — удельная теплоемкость жидкости, Дж/(кг·К)
$\beta$ — коэффициент теплового расширения, К$^{-1}$;
$s$ — удельная энтропия, Дж/(кг·К);
$T_1$ — температура границы полости, через которую тепло отводится, К;
$T_2$ — температура границы полости, через которую тепло подводится, К.

Индексы:
$i$, $j$ — порядковый номер орта системы координат;

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. **Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.** Гидродинамика. М.: Наука, 1986. 736 с.
2. **Гершуни Г.З., Жуховицкий Е.М.** Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости. М.: Наука, 1972. 392 с.