УДК 621.431.37: 536.25

Г. В. Ткаченко, Б. А. Урюков

Институт проблем материаловедения НАНУ, Киев, Украина

МОДЕЛЬ ТУРБУЛЕНТНОЙ ЕСТЕСТВЕННОЙ КОНВЕКЦИИ ОКОЛО ВЕРТИКАЛЬНОЙ СТЕНКИ НА ОСНОВЕ ГИПОТЕЗЫ С.С. КУТАТЕЛАДЗЕ

АННОТАЦИЯ

Модель турбулентного режима в естественно-конвективном пограничном слое основана на гипотезе С.С. Кутателадзе о «критерии устойчивости» ламинарного подслоя в турбулентном естественно-конвективном пограничном слое, а также на обобщении экспериментальных данных о распределении скорости и температуры в пределах турбулентного ядра пограничного слоя. Схема модели аналогична двухслойной модели Прандтля в вынужденном течении. В ламинарном подслое имеют место линейное распределение температуры и квадратичное распределение скорости, а в турбулентном ядре — экспоненциальные распределения. Эмпирические постоянные получены из сопоставления формулы для числа Нуссельта с известными теоретическими и экспериментальными данными. Показано, что расход жидкости в пограничном слое пропорционален числу Нуссельта.

1. ВВЕДЕНИЕ

В последнее время наметилось усиление интереса к задачам естественной конвекции, что связано с проблемами краткосрочного и длительного хранения дорогостоящих и опасных жидких веществ. К ним можно отнести топливо в баках ракетоносителей, находящихся под воздействием внешней среды, жидкие радиоактивные тепловыделяющие материалы и др. Благодаря естественно-конвективным потокам на стенках температура хранимых материалов выравнивается по объему. Скорость этого процесса всецело определяется закономерностями и характеристиками конвективных потоков. Большие габаритные размеры хранилищ, измеряемые метрами, обусловливают переход течения в конвективном пограничном слое от ламинарного к турбулентному. При решении таких задач возникают, по крайней мере, две проблемы. Первая состоит в том, что до сих пор отсутствует достаточно надежная и в то же время достаточно простая для использования в инженерных расчетах теория турбулентного режима естественной конвекции. Известная теория Эккерта-Джексона [1], разработанная в середине прошлого века, критиковалась многими исследователями, как теоретиками, так и экспериментаторами, но за прошедшее время в этом направлении сделано было мало. Заслуживают внимания две работы. Одна из них — это численный расчет Ното и Матсумото [2], который, однако, труден для использования, поскольку конкретный расчет сделан только для числа Грасгофа, равного 10^{10}. Полученные результаты полезны для анализа поведения числа Нуссельта с изменением числа Прандтля. Работа Зайчика и Алипченкова [3] основана на решении системы уравнений для вторых моментов пульсаций скорости и температуры в пристенной турбулентной области для очень больших чисел Ричардсона. В этом случае удалось получить аналитическое выражение для числа Нуссельта.

Вторая проблема заключается в том, что для расчета процесса выравнивания температуры жидкости в баках-хранилищах при заданном тепловом потоке через стенки достаточно знать лишь расход жидкости в пограничном слое. Несомненно, он зависит от числа Нуссельта, но выяснением этой зависимости ни теоретически, ни экспериментально никто специально не занимался.

В данной работе предлагается модель турбулентного режима в естественно-конвективном пограничном слое, основанная на гипотезе С.С. Кутателадзе о «критерии устойчивости» ламинарного подслоя в турбулентном естественно-конвективном пограничном слое и на обобщении экспериментальных данных Чизрайта о распределении скорости и температуры в пределах турбулентного ядра пограничного слоя.

2. СТРУКТУРА ЛАМИНАРНОГО ПОДСЛОЯ И ТУРБУЛЕНТНОГО ЯДРА

Классическая схема вывода формулы Блазиуса для коэффициента трения на плоской пластине в безграничном потоке жидкости заключается в следующем. Принимается, что в турбулентном ядре пограничного слоя скорость изменяется по известному «закону 1/7-й». В пределах ламинарного подслоя скорость изменяется линейно. Граница ламинарного подслоя y_l в двухслойной модели Прандтля определяется «критерием устойчивости» [4] $v_* y_l/\nu = A_l = \mathrm{const}$, где v_* – «скорость трения». Координата y_l находится путем определения точки пересечения двух профилей, а подстановка в формулу для y_l позволяет получить формулу Блазиуса.

Точно так же, зная обобщенный закон распределения температуры и скорости в турбулентном ядре свободноконвективного пограничного слоя и «критерий устойчивости» ламинарного подслоя, можно получить формулы как для коэффициента трения, так и для числа Нуссельта.

На рис. 1 приведены результаты обработки экспериментальных данных Чизрайта [5] о распределении скорости и температуры в пределах турбулентного пограничного слоя в условиях естественной конвекции воздуха около нагреваемой вертикальной поверхности, где

$$Z = \frac{\bar{u}}{\eta'}; \quad \theta = \frac{T - T_a}{T_w - T_a}; \quad \eta' = \frac{y}{x}\mathrm{Gr}_x^{0.1};$$

$$\bar{u} = \frac{u}{u_*}; \quad u_* = \sqrt{g\beta(T_w - T_a)x}.$$

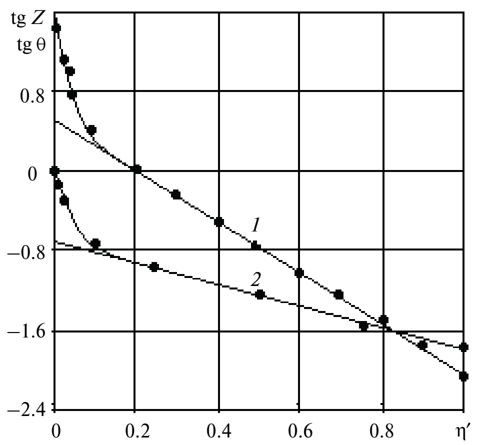

Рис. 1. Логарифмическое представление профилей скорости (1) и температуры (2) в турбулентном пограничном слое: точки — экспериментальные данные Чизрайта

Видно, что в пределах большей части пограничного слоя профили скорости и температуры можно аппроксимировать формулами вида:

$$\begin{gathered} \frac{u}{U} = f(\eta) = \eta \exp(-\eta); \\ \frac{T - T_a}{T_w - T_a} = \theta(\eta_\mathrm{T}) = \theta_* \exp(-\eta_\mathrm{T}), \end{gathered} \tag{1}$$

где $\eta = y/\delta$; $\eta_\mathrm{T} = y/\delta_\mathrm{T}$; U — неизвестный заранее параметр, имеющий размерность скорости; θ_* — эмпирический коэффициент.

Вид пристенной части профилей резко отличается от остальной.

Для определения размеров скоростного и температурного ламинарных подслоев воспользуемся гипотезой, высказанной С.С. Кутателадзе [6] о том, что существует «критерий устойчивости» ламинарного подслоя:

$$\mathrm{Re}_m \sqrt{\mathrm{Pr}} = \frac{u_m y_\mathrm{T}}{\nu}\sqrt{\mathrm{Pr}} = A_m \approx 200 . \tag{2}$$

Представим распределение скорости и температуры вблизи стенки в виде рядов по y:

$$u = \sum_{i=1}^{\infty} a_i y^i; \quad \frac{T - T_a}{T_w - T_a} = 1 + \sum_{i=1}^{\infty} b_i y^i$$

и подставим их в уравнения естественной конвекции, учитывающие турбулентный перенос импульса и тепла в прандтлевской форме:

$$u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = g\beta(T - T_a) + \frac{\partial}{\partial y}\left[(\nu + \nu_t)\frac{\partial u}{\partial y}\right];$$

$$u\frac{\partial T}{\partial x} + v\frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left[\left(\frac{\nu}{\mathrm{Pr}} + \frac{\nu_t}{\mathrm{Pr}_t}\right)\frac{\partial T}{\partial y}\right];$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0;$$

$$\nu_\mathrm{t} = k^2 y^2 \left|\frac{\partial u}{\partial y}\right|.$$

Приравнивая коэффициенты при y в одинаковых степенях, получим для y^0 и y^1 из уравнения движения

$$a_2 = -\frac{g\beta(T_w - T_a)}{2\nu},$$

$$a_3 = -\frac{g\beta(T_w - T_a)}{6\nu} b_1 - \frac{k^2}{3\nu} a_1^2$$

и из уравнения теплопроводности

$$b_2 = 0, \quad b_3 = -\frac{k^2}{3a\,\mathrm{Pr}_\mathrm{t}} a_1 b_1 .$$

Видно, что область молекулярного переноса описывается двумя первыми членами, поскольку коэффициенты при y^3 уже «чувствуют» влияние турбулентности. Таким образом, как и указывал С.С. Кутателадзе, в ламинарном подслое нарушается линейный закон распределения скорости, который характерен для вынужденной конвекции, но температура распределена линейно.

Поскольку $a_1 = (\partial u/\partial y)_w$, $b_1 = (\partial\theta/\partial y)_w$, то

$$\begin{gathered} u = \frac{\tau_w}{\mu} y - \frac{g\beta(T_w - T_a)}{2\nu} y^2, \\ \theta = \frac{T - T_a}{T_w - T_a} = 1 + \frac{q_w}{\lambda(T_w - T_a)} y. \end{gathered} \tag{3}$$

Вне ламинарного подслоя профили скорости и температуры аппроксимируются выражениями (1). На рис. 2, где данные рис. 1 построены в исходной форме, сопоставлены полные профили и профили в турбулентном ядре.

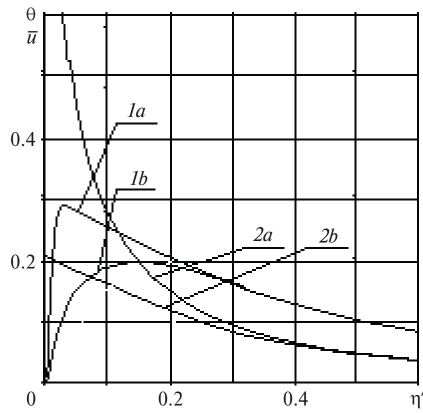

Рис. 2. Распределения скорости ($1a$) и температуры ($2a$) во всем пограничном слое и те же профили в турбулентном ядре ($1b$, $2b$), продленные до стенки

Далее, также следуя гипотезе Кутателадзе, положим, что граница динамического ламинарного подслоя находится в точке максимума скорости (y_m, u_m), т.е.

$$y_m = \frac{\nu}{g\beta(T_w - T_a)} \frac{\tau_w}{\mu},$$

$$u_m = \frac{2\nu}{g\beta(T_w - T_a)} \left(\frac{\tau_w}{\mu}\right)^2 . \tag{4}$$

3. ПАРАМЕТРЫ ТУРБУЛЕНТНОЙ ЕСТЕСТВЕННОЙ КОНВЕКЦИИ

Полученные результаты позволяют найти безразмерные параметры естественной конвекции, такие как коэффициент трения, число Нуссельта и расход жидкости в пограничном слое.

Так, подставив (4) в (2), получим выражение для коэффициента трения

$$\frac{c_f}{2}=\frac{\tau_w}{\rho u_*^2}=\frac{y_m}{x}=\alpha \mathrm{Gr}_x^{-1/3},\quad \alpha=\left(\frac{2A_m}{\sqrt{\mathrm{Pr}}}\right)^{1/3}. \quad (5)$$

Следуя той же гипотезе, естественно считать, что существует граница теплового ламинарного подслоя $y_{m\mathrm{T}}$, на которой линейный «ламинарный» профиль температуры пересекается с экспоненциальным «турбулентным» профилем. Взаиморасположение границ динамического и теплового ламинарных подслоев в условиях вынужденной конвекции зависит от отношения молекулярного числа Прандтля к турбулентному [7]: $\sigma = \mathrm{Pr}/\mathrm{Pr}_t$: при $\sigma > 1$ $y_{m\mathrm{T}} < y_m$ и наоборот. То же самое возможно и в условиях естественной конвекции, поэтому введем отношение $\Delta_m = y_{m\mathrm{T}}/y_m$. В результате из (1) и (3) находим выражение для числа Нуссельта:

$$\mathrm{Nu}_x=\frac{1-\theta_*\exp\left(-\frac{c_f}{2}\frac{\Delta_m}{\bar{\delta}\Delta}\right)}{(c_f/2)\Delta_m}, \quad (6)$$

где $\Delta = \delta_\mathrm{T}/\delta$ — отношение толщин теплового и динамического пограничных слоев; $\bar{\delta} = \delta/x$.

Безразмерная функция расхода жидкости в пограничном слое на нагреваемой боковой стенке, определяется как

$$\bar{G}_1=\frac{1}{\nu}\int_0^\infty u\,dy=k_1\bar{U}\bar{\delta};\quad k_1=\int_0^\infty f(\eta)d\eta,$$

где $\bar{U} = Ux/\nu$.

Для нахождения функций $\bar{\delta}(\mathrm{Gr}_x)$ и $\bar{U}(\mathrm{Gr}_x)$ служат уравнения естественной конвекции, записанные в интегральной форме:

$$\frac{d}{dx}\int_0^\infty u^2dy=g\beta\int_0^\infty (T-T_a)dy-\nu\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_w; \quad (7)$$

$$\frac{d}{dx}\int_0^\infty u(T-T_a)dy=-a\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_w. \quad (8)$$

В том случае, когда условием теплоподвода служит постоянство температуры нагреваемой поверхности, в качестве независимой переменной удобно взять число Грасгофа $\xi = \mathrm{Gr}_x$, определенное через координату x.

Запишем уравнения (7), (8) в безразмерном виде:

$$3\xi^{1/3}\frac{d}{d\xi}\left(\frac{k_{11}}{\xi^{1/3}}\bar{U}^2\bar{\delta}\right)=k_2\bar{\delta}\Delta-\frac{c_f}{2}; \quad (9)$$

$$3\xi^{1/2}\frac{d}{d\xi}[k_{12}\bar{U}\bar{\delta}(T_w-T_a)]=\mathrm{St}(T_w-T_a), \quad (10)$$

где $k_{11}=\int_0^\infty f^2(\eta)d\eta;\quad k_2=\int_0^\infty \theta(\eta_\mathrm{T})d\eta_\mathrm{T};\quad k_{12}=\int_0^\infty f(\eta)\theta(\eta_\mathrm{T})d\eta.$

Параметры k_i представляют собой интегралы от безразмерных профилей скорости и температуры. Использование профилей (1) для расчета этих интегралов занижают их реальные значения, что видно из рис. 2. Поэтому снабдим профили (1) коэффициентами C_u для скорости и C_t для температуры, значения которых определяются из условия наилучшего согласования с эталонными данными. Считаем, что все параметры k_i постоянны. Правая часть уравнения (10) выражается через число Нуссельта (6) в соответствии с формулой: $\mathrm{Nu}_x = \mathrm{St\ Pr\ Gr}_x^{1/2}$. Для того чтобы иметь простые расчетные формулы, найдем приближенное решение этих уравнений в виде степенных зависимостей с коэффициентами, зависящими от x. Для случая изотермической стенки положим $\bar{U} = U_0\,\xi^{1/2}$, $\bar{\delta} = \delta_0\,\xi^{-1/6}$. Этим зависимостям удовлетворяет уравнение (10) при достаточно больших значениях числа Грасгофа. При дифференцировании коэффициенты U_0 и δ_0 считаем постоянными (аналогичное допущение было сделано в работе [2]). В результате находим:

$$\frac{3}{2}k_{11}U_0^2\delta_0=k_2\delta_0\Delta-\alpha\xi^{-1/6};$$

$$U_0\delta_0=\frac{\Phi}{k_{12}\alpha\,\mathrm{Pr}\,\Delta_m};$$

$$\Phi=1-\theta_*\exp\left(-\frac{\alpha\Delta_m}{\Delta}\frac{\xi^{-1/6}}{\delta_0}\right).$$

Исключая U_0, получаем

$$X^2-\frac{\xi^{-1/6}}{k_2\Delta_m}X=\frac{3}{2}\frac{k_{11}\Delta}{k_2}\left(\frac{\Phi}{k_{12}\,\mathrm{Pr}\,\alpha^2\Delta_m^2}\right)^2, \quad (11)$$

где $X = \Delta\delta_0/\alpha\Delta_m$. Отношение динамического и теплового турбулентных слоев имеет порядок $\mathrm{Pr}_t^{1/2}$, поэтому, считая $\mathrm{Pr}_t \approx 1$, можно принять $\Delta \approx 1$. В результате интегралы от профилей будут такими: $k_1 = C_u$; $k_2 = C_t$; $k_{11} = C_u^2/4$; $k_{12} = C_uC_t/4$. Параметр $\Delta_\mathrm{т}$ зависит от числа Прандтля в форме: $\Delta_\mathrm{т} = \mathrm{Pr}^{-1/n}$, где n — степень зависимости турбулентной вязкости от y вблизи стенки [7], которая изменяется в пределах $n = 2 \div 4$. Подбор значений коэффициентов C_u, C_t, θ_* и показателя n, которые можно рассматривать как эмпирические постоянные, производился таким образом, чтобы результирующее выражение для числа Нуссельта наиболее близко соответствовало известным теоретическим и экспериментальным данным в районе $\mathrm{Pr} \sim 1$. Использовались теоретические работы [2, 3] и экспериментальная формула, приведенная в монографии [8]:

$$\mathrm{Nu} = 0.10\,\mathrm{Ra}^{1/3}. \quad (12)$$

В результате проведенного цикла расчетов и сопоставления с указанными данными было получено, что наиболее приемлемыми значениями являются: $C_t = 2.22$; $\theta_* = 1$, $n = 4$. Коэффициент C_u определен из расчета отношения интегралов скоростей, показанных на рис. 2 (кривые *1a* и *1b*), и равен 1.20.

Результаты расчета и сопоставление с литературными данными показаны на рис. 3, который аналогичен рис. 1 работы [3]. Экспериментальные точки заимствованы из того же рисунка.

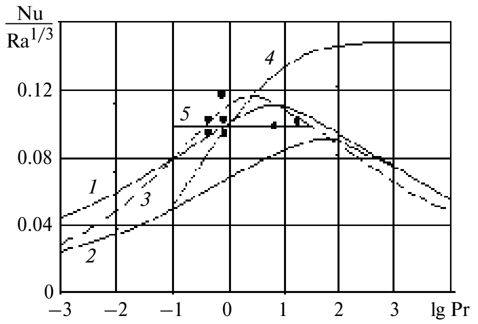

Рис. 3. Сопоставление моделей турбулентного свободно-конвективного пограничного слоя: *1*, *2* — данная модель при $Gr_x = 10^{10}$ и 10^{14}; пунктирная линия *3* — [2] при $Gr_x = 10^{10}$; *4* — [3]; *5* — экспериментальная формула (12); точки — экспериментальные данные из работы [3]

Видно, что в диапазоне чисел Прандтля, охваченном экспериментами ($0{,}3 < Pr < 20$), наблюдается хорошая сходимость всех расчетов. Следует лишь отметить, что модель данной работы более близка к [2], чем к [3], особенно в крайних диапазонах числа Прандтля.

Анализ результатов расчета по данной модели показывает, что зависимость числа Нуссельта от числа Грасгофа в диапазоне $10^9 \le Gr_x \le 10^{14}$ с максимальной погрешностью ~ 3% можно аппроксимировать степенной зависимостью вида

$$Nu_x = C\,Gr_x^{\,m}, \qquad (13)$$

в которой показатель m и коэффициент C являются функциями только числа Прандтля (рис. 4). При больших числах Прандтля $m \approx 1/3$, а при $Pr \to 0$ m стремится к 1/4, т.е. к «ламинарному» значению, что совпадает с исследованием Бейли, указанным в [8].

Проведен анализ того, насколько сильно степенное решение (13) отличается от численного решения исходной системы уравнений (9), (10). Он показал, во-первых, что эта система не имеет физически достоверного решения при $\xi \to 0$. Во-вторых, вариация начальных условий, задаваемых на некотором конечном расстоянии от начала, слабо влияет на решение: оно быстро приходят к общему, определяемому начальными условиями, рассчитанными по формуле (13). В свою очередь, это численное решение достаточно мало отличается от степенного.

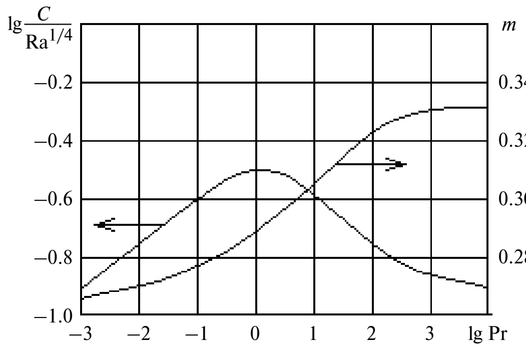

Рис. 4. Зависимости показателя m и коэффициента C от числа Прандтля

Еще один результат данной работы заключается в том, что из сопоставления полученных соотношений получается формула для расхода жидкости в пограничном слое:

$$\overline{G}_1 = \frac{k_1}{k_{12}\,Pr} Nu_x = \frac{1.8}{Pr} Nu_x . \qquad (14)$$

СПИСОК ОБОЗНАЧЕНИЙ

T_w, T_a — температура на стенке и вдали от нее;

δ, δ_T — характерные толщины динамического и теплового пограничных слоев.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Eckert E.R., Jackson T.W.** Analysis of Turbulent Free Convection Boundary Layer of Flat Plate //NACA Rep. 1951. No 1015.
2. **Ното, Мацумото.** Турбулентный перенос тепла при свободной конвекции вдоль изотермической вертикальной плоской поверхности // Труды Амер. об-ва инж.-мех. Сер. С. 1975. No 4. P. 139—141.
3. **Зайчик Л.И., Алипченков В.М.** Свободноконвективный турбулентный теплообмен при больших числах Рэлея на наклонной поверхности // РНКТ2. М., 1998. Т. 3. С. 72—75.
4. **Тепломассообмен** и трение в турбулентном пограничном слое / Под ред. С.С. Кутателадзе. СОАН СССР, Институт теплофизики, 1964. 207 с.
5. **Чизрайт.** Естественная турбулентная конвекция от вертикальной плоской поверхности. // Труды Амер. о-ва инж.-мех. Сер. С. 1968. No 1. С. 1—9.
6. **Кутателадзе С.С.** Пристенная турбулентность. Новосибирск: Наука, 1973. 228с.
7. **Урюков Б.А.** Теплопередача в турбулентном пограничном слое жидкости // ПМТФ. 1960. № 3. С. 119—125.
8. **Джалурия Й.** Естественная конвекция. Тепло- и массообмен. М.: Мир, 1983. 360 с.