УДК 532.517.4

В.И. Михин

г. Обнинск, Россия

МОДЕЛИ ТУРБУЛЕНТНОСТИ *k*-ε ПЕРВОГО И ВТОРОГО ПОРЯДКА. РЕЗУЛЬТАТЫ ТЕСТИРОВАНИЯ

АННОТАЦИЯ

Предложены две *k*-ε модели турбулентности: первого и второго порядка соответственно. Эти модели получены разложением корреляционных функций точных уравнений турбулентной энергии и скорости диссипации энергии несжимаемой жидкости в ряд по пространственным производным скорости. В модели первого порядка тензор напряжений Рейнольдса представлен соотношением Буссинеска, связывающим напряжения Рейнольдса с тензором скорости деформаций посредством эффективной турбулентной вязкости. В модели второго порядка тензор напряжений Рейнольдса содержит дополнительный член с пространственными производными скорости второго порядка. Проведено тестирование моделей путем сравнения результатов моделирования турбулентных течений в различных каналах с результатами экспериментов.

1. ВВЕДЕНИЕ

Двухпараметрические модели турбулентности типа *k*-ε в качестве фундаментального соотношения используют гипотезу Буссинеска, выражающую связь напряжений Рейнольдса с тензором скорости деформаций посредством эффективной турбулентной вязкости. Согласно Колмогорову эффективная турбулентная вязкость является линейной функцией турбулентного числа Рейнольдса R_t. Однако первые применения моделей турбулентности указывали на более сложную зависимость, что привело к использованию модельных функций турбулентного числа Рейнольдса. Соответствующие модели позволяют моделировать турбулентность в ядре потока, в области больших турбулентных чисел Рейнольдса. В процессе развития моделей турбулентности снова вернулись к идее Прандтля о влиянии стенки на пространственный масштаб турбулентности. Современные модели турбулентности позволяют моделировать турбулентность во всей области течения, включая вязкий подслой [1]. Такая возможность достигается использованием модельных функций двух аргументов: турбулентного числа Рейнольдса и безразмерной пространственной координаты y^+, определяющей положение произвольной точки потока относительно ближайшей стенки канала.

В настоящей работе предложены две модели турбулентности: первого и второго порядка соответственно. Эти модели не содержат модельные функции. Модельные уравнения для турбулентной энергии и скорости диссипации получены путем разложения корреляционных функций точных уравнений в ряды по пространственным производным средней скорости.

В модели первого порядка тензор напряжений Рейнольдса определяется гипотезой Буссинеска. При этом, эффективная турбулентная вязкость, как размерный множитель этой зависимости, является линейной функцией турбулентного числа Рейнольдса, что находится в полном соответствии с гипотезой Колмогорова. В модели второго порядка тензор напряжений Рейнольдса выражен через пространственные производные средней скорости первого и второго порядков. С членом второго порядка связаны силы, ответственные за процесс обмена энергией между различными конфигурациями осредненного движения через механизм турбулентности.

В настоящей работе представлены результаты моделирования турбулентных течений несжимаемой жидкости в различных каналах и дано сравнение полученных результатов с данными экспериментов.

2. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Уравнение неразрывности:

$$u_{i,i} = 0\,. \tag{1}$$

Уравнение Рейнольдса:

$$U_{i,t} + U_k U_{i,k} + \partial_k \left\langle u'_k \cdot u'_i \right\rangle = -\rho^{-1} P_{,i} + \nu U_{i,kk}\,. \tag{2}$$

Уравнение турбулентной энергии:

$$\begin{aligned}&\left(\partial_t + U_n \partial_n\right) k = \\ &= -\left\langle u'_i \cdot u'_j \right\rangle U_{i,j} + \partial_n \left[\left(\nu_t / \sigma_k + \nu\right) k_{,n}\right] - \varepsilon.\end{aligned} \tag{3}$$

Уравнение скорости диссипации:

$$\begin{aligned}&\varepsilon_{,t} + U_n \varepsilon_{,n} = -2\nu m_{ij} U_{i,j} - \nu r_{ijk} U_{i,jk} - \\ &-\frac{2}{3}\nu \partial_k \left\langle u'_k \cdot u'_i \right\rangle U_{i,nn} - 2\nu \left\langle u'_{i,j} \cdot u'_{i,n} \cdot u'_{n,j} \right\rangle + \\ &+\partial_n \left[\left(\nu_t / \sigma_\varepsilon + \nu\right) \varepsilon_{,n}\right] - C_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon^2}{k}.\end{aligned} \tag{4}$$

Корреляционные функции в (1–4) определяются следующими соотношениями:

$$\begin{aligned}&-\left\langle u'_i \cdot u'_j \right\rangle + 2/3 \delta_{ij} k = \nu_t S_{ij} - \\ &-C_k \frac{k^2}{\varepsilon} \left(\frac{\nu k}{\varepsilon}\right)^{1/2} R_{mij} n_m,\end{aligned} \tag{5}$$

$$r_{ijk} = -C_{\varepsilon 4} \cdot \nu_t \cdot R_{ijk}\,, \tag{6}$$

$$-2\nu m_{ij} = C_{\varepsilon 1} \nu_t \frac{\varepsilon}{k} S_{ij} - C_{\varepsilon 3} k \left(\frac{\nu k}{\varepsilon}\right)^{1/2} \partial_m S_{ij} l_m, \tag{7}$$

$$-2\nu\left\langle u'_{i,j}\cdot u'_{i,n}\cdot u'_{n,j}\right\rangle = -C_{\varepsilon 5}\frac{\nu\varepsilon}{k}S_{ij}^{2} + \\ + C_{\varepsilon 6}\nu^{2}R_{ijk}^{2}. \quad (8)$$

По определению:

$$\nu_t \equiv C_\mu \cdot \frac{k^2}{\varepsilon};$$

$$m_{ij} \equiv \left\langle u'_{i,n}\cdot u'_{j,n}\right\rangle + \left\langle u'_{n,i}\cdot u'_{n,j}\right\rangle - \frac{2}{3}\cdot\delta_{ij}\cdot\frac{\varepsilon}{\nu};$$

$$r_{ijk} \equiv \left\langle u'_k \cdot u'_{i,j}\right\rangle + \left\langle u'_j \cdot u'_{i,k}\right\rangle - \frac{2}{3}\cdot\delta_{jk}\cdot\partial_n\left\langle u'_n\cdot u'_i\right\rangle;$$

$$R_{mij} \equiv U_{m,ij} - \frac{\delta_{ij}}{3}U_{m,nn};\ S_{ij} \equiv U_{i,j} + U_{j,i};$$

$$n_i \equiv U_i / \sqrt{U_k^2};\ l_i \equiv k_{,i} / \sqrt{k_{,n}^2}.$$

Как это принято, повторяющийся дважды в тензорном выражении индекс означает суммирование по этому индексу.

Значения модельных констант:

$C_\mu = 0.09$, $C_k = 0.4 - 0.5$, $C_{\varepsilon 1} = 1.5$, $C_{\varepsilon 2} = 1.9$, $C_{\varepsilon 3} = 0.02$, $C_{\varepsilon 4} = 2$, $C_{\varepsilon 5} = 0.09$, $C_{\varepsilon 6} = 24$, $\sigma_k = 1.4$, $\sigma_\varepsilon = 1.4$.

Граничные условия для турбулентных величин предполагают равенство нулю турбулентной энергии и нормальной производной скорости диссипации на стенках канала:

$$k_w = 0, \quad \partial\varepsilon_w / \partial n = 0.$$

3. МОДЕЛЬ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

В модели первого порядка тензор напряжений Рейнольдса $\langle u_i' u_j' \rangle$ определяется гипотезой Буссинеска, связывающей напряжения Рейнольдса с тензором скорости деформаций S_{ij} посредством эффективной турбулентной вязкости ν_t. Модель первого порядка получаем, полагая в (5) $C_k = 0$.

3.1. Плоский канал

Моделирование развитого турбулентного течения в плоском канале дает распределения скорости, хорошо согласующиеся с полуэмпирической моделью Кармана [2], рис.1, а коэффициенты трения – с законами Дина [3], Зарби и Рейнольдса [4], рис.2.

3.2. Круглая труба

Распределениям скорости, полученные моделирование развитого турбулентного течения в круглой трубе, описываются эмпирической формулой Рейхарда [2], рис.3, а коэффициенты гидравлического сопротивления – формулами Никурадзе [5] и Филоненко [6], рис. 4.

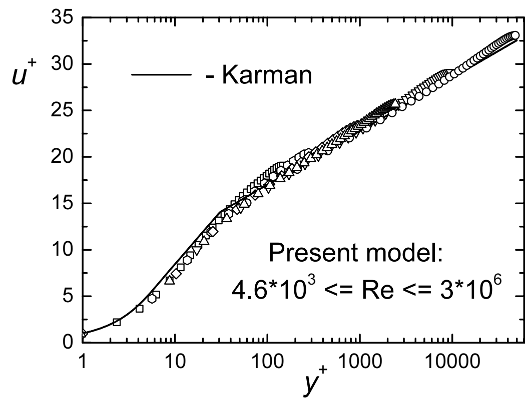

Рис. 1. Профили скорости в плоском канале

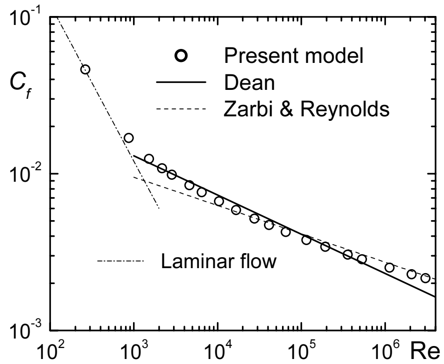

Рис. 2. Коэффициенты трения в плоском канале

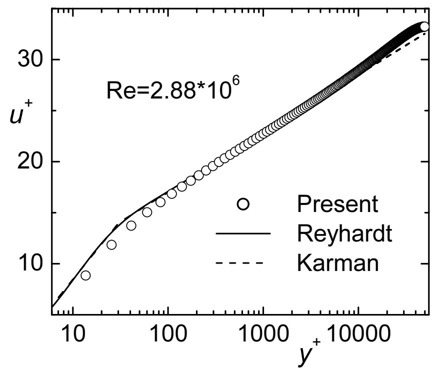

Рис. 3. Профили скорости в круглой трубе

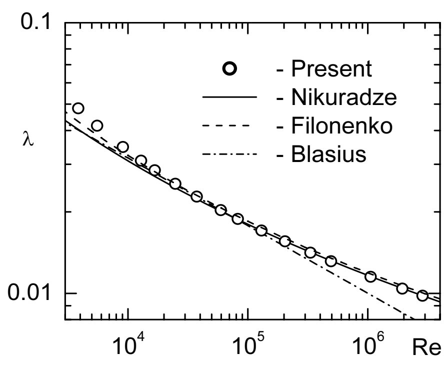

Рис. 4. Коэффициенты гидравлического сопротивления круглой трубы

3.3. Кольцевые каналы

Моделировалось развитое турбулентное течение в кольцевых каналах с различным отношением внешнего, R_2 , и внутреннего, R_1, радиусов. Получено хорошее согласие рассчитанных (сплошные линии) и измеренных (точки) профилей скорости, рис. 5. Экспериментальные данные взяты из работы [7]. Пунктирной линией изображены профили скорости, рассчитанные по методике [7].

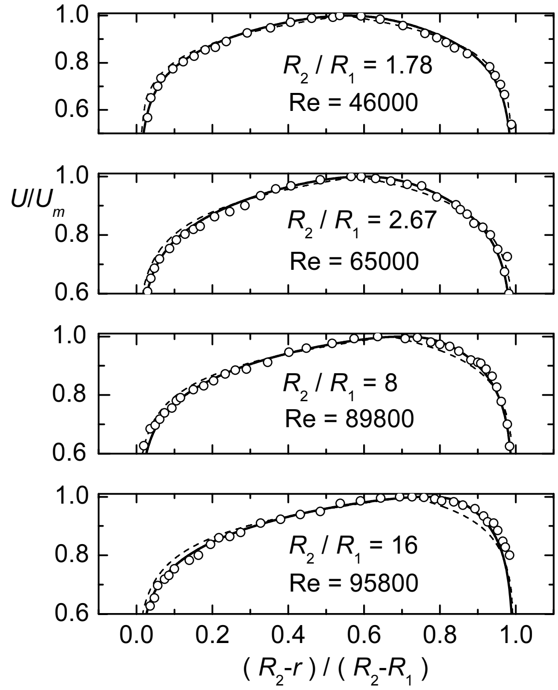

Рис. 5. Профили скорости в кольцевых каналах

4. МОДЕЛЬ ВТОРОГО ПОРЯДКА

В модели турбулентности второго порядка тензор напряжений Рейнольдса определяется соотношение (5). Член второго порядка в правой части (5) не влияет на распределения скорости и, следовательно, на коэффициенты гидравлического сопротивления вышерассмотренных каналов, обладающих высокой симметрией. Однако даже в таких каналах диагональные компоненты напряжений Рейнольдса взаимно различны, рис. 6 ($C_k = 0.5$).

Разница между поперечными компонентами тензора напряжений Рейнольдса является причиной появления вторичных токов в прямых каналах более сложной геометрии. На рис. 7 представлены линии тока вторичного течения, полученные моделированием развитого турбулентного течения в прямой трубе квадратного сечения. Максимальные значения скорости вторичного течения достигают двух процентов значения среднерасходной скорости.

Течения в каналах с обратным выступом могут рассматриваться как пример сложных течений. На рис. 8 результаты численного моделирования турбулентного течения в прямом канале с обратным выступом сравниваются с экспериментальными данными работы [8]. Распределения скорости нормированы на максимальное значение скорости U_0 на входе в канал (x – расстояние до выступа). Сравнивая данные рис. 8 с аналогичными распределениями, полученными с помощью модели первого порядка (см. [9]), заключаем, что второго порядка член соотношения (5) позволяет добиться лучшего согласия с данными экспериментов. Экспериментальное значение длины зоны рециркуляции (расстояние от выступа до точки присоединения потока) составляет $6.51h$ и совпадает с рассчитанным значением. Модель первого порядка дает значение $7.2h$.

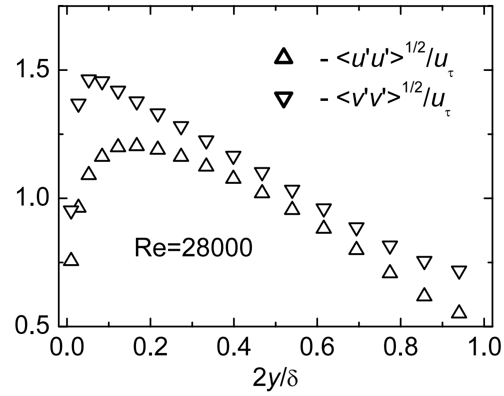

Рис. 6. Диагональные компоненты напряжений Рейнольдса в плоском канале

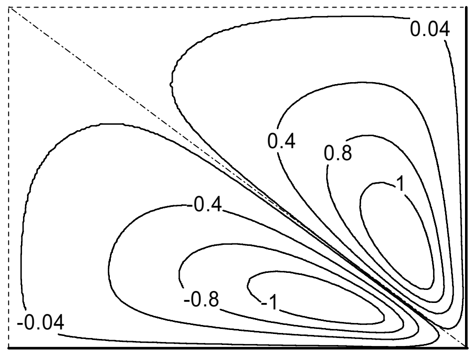

Рис. 7. Линии тока вторичного течения в трубе квадратного сечения: Re = 4500

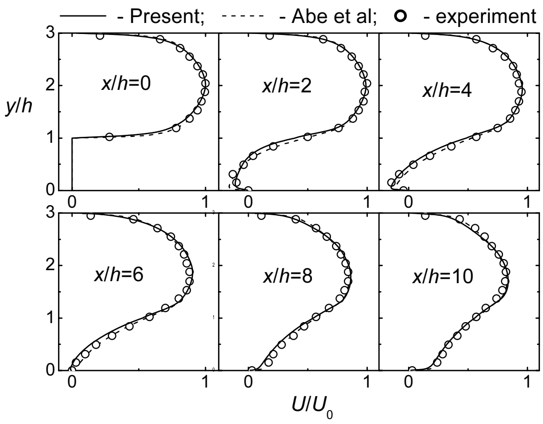

Рис. 8. Распределения скорости в различных сечениях за обратным выступом: $Re_h = 5500$, $ER = 1.5$

На рис. 8 представлены также данные, рассчитанные с помощью k-ε модели турбулентности работы [1]. Полученное с помощью этой модели значение длины зоны рециркуляции составляет $6.1h$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предложены две k-ε модели турбулентности: первого и второго порядка соответственно. Эти модели получены разложением корреляционных функций точных уравнений турбулентной энергии и скорости диссипации энергии несжимаемой жидкости в ряд по пространственным производным поля скорости, усредненного по статистическому ансамблю. Предложенные модели турбулентности не содержат модельные функции.

В модели турбулентности первого порядка тензор напряжений Рейнольдса выражается через тензор скорости деформации соотношением Буссинеска. В модели второго порядка тензор напряжений Рейнольдса представлен пространственными производными средней скорости первого и второго порядка соответственно.

Второго порядка член тензора напряжений Рейнольдса не влияет на распределения скорости и коэффициенты сопротивления каналов высокой симметрии. Результаты численного моделирования развитого турбулентного течения в плоском канале, круглой трубе и кольцевых каналах находятся в хорошем согласии с данными экспериментов.

Второго порядка член тензора напряжений Рейнольдса ответственен за процесс обмена энергией между различными конфигурациями осредненного движения. Силы, связанные с этим членом, приводят к вторичным токам в каналах низкой симметрией (например, прямой канал квадратного сечения). Максимальное значение скорости вторичного течения может достигать двух процентов среднерасходной скорости.

Второго порядка член тензора напряжений Рейнольдса позволил улучшить результаты моделирования течений в каналах с обратным выступом, рассматриваемых как пример сложных течений.

Тестирование модели турбулентности первого порядка обнаружило высокую эффективность модели. Эта эффективность проявляется в хорошей сходимости вычислительного процесса. Второго порядка член напряжений Рейнольдса нелинейный и содержит пространственные производные наивысшего порядка в системе дифференциальных уравнений модели. Это отрицательно влияет на устойчивость вычислительного алгоритма и требует разработки адекватной неявной схемы численной аппроксимации этого члена. В настоящей работе использовалась явная схема аппроксимации.

СПИСОК ОБОЗНАЧЕНИЙ

u_i – компонента скорости, i=1,2,3;
U_i – скорость, усредненная по ансамблю;
u'_i – турбулентные пульсации скорости u_i;
p – давление;
P – среднее по ансамблю поле давления;
p' – турбулентные пульсации давления;
$\langle u_i \cdot u_j \rangle$ – среднее по ансамблю произведение компонент скорости;
k – турбулентная энергия, $k \equiv \langle u_i' \cdot u_i' \rangle / 2$;
ε – скорость диссипации турбулентной энергии, $\varepsilon \equiv \nu \langle u'_{i,j}\, u'_{i,j} \rangle$;
ρ – плотность;
δ_{ij} – симметричный единичный тензор;
ν, ν_t – кинематическая молекулярная и турбулентная вязкости;
R_t – турбулентное число Рейнольдса, $R_t \equiv k^2/\varepsilon\nu$;
C_f – коэффициент поверхностного трения, $C_f = \tau_w / (\rho\, U_m^2 / 2)$;
u_τ – масштаб скорости, основанный на напряжении трения, $u_\tau = (\tau_w / \rho)^{1/2}$;
τ_w – напряжение трения на стенке;
u^+ – безразмерная скорость, $u^+ = u / u_\tau$;
y^+ – безразмерное расстояние до стенки канала, $y^+ = y\, u_\tau / \nu$;
Re – число Рейнольдса, основанное на средней скорости и гидравлическом диаметре канала.
δ – половина расстояния между стенками плоского канала;
h – высота обратного выступа;
ER – коэффициент расширения канала с обратным выступом как отношению ширин канала.
Операторы производных:

$$k_{,t} = \partial_t k \equiv \partial k / \partial t; \quad k_{,i} = \partial_i k \equiv \partial k / \partial x_i, \quad i = 1,2,3.$$

$$u_{i,t} = \partial_t u_i \equiv \partial u_i / \partial t, \quad u_{i,k} = \partial_k u_i \equiv \partial u_i / \partial x_k, \; i,k = 1,2,3.$$

$$u_{i,jk} = \partial_{jk} u_i \equiv \partial^2 u_i / \partial x_j \partial x_k, \quad i,j,k = 1,2,3.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Abe K., Kondoh T., Nagano Y.** A new turbulence model for predicting fluid flow and heat transfer in separating and reattaching flows -1. Flow field calculations // Int. J. Heat Mass Transfer. 1994. Vol. 37. № 1. P. 139–151.
2. **Гидродинамика** и теплообмен в атомных энергетических установках / В.И. Субботин и др. М.: Атомиздат, 1975.
3. **Dean R.B.** Reynolds number dependence of skin friction and other bulk flow variables in two-dimensional rectangular duct flow, Trans. ASME Journal of Fluids Engineering 100 (1978) 215.
4. **Zarbi G., Reynolds A.J.** Wall stress measurements in two-dimensional turbulent channel and boundary-layer flows, and the wall layer differences, Trans. Japan Society of Mechanical Engineering B58 (1992) 1378.
5. **Schlichting H.** Boundary-Layer Theory. McGraw-Hill Inc., 1979.
6. **Идельчик И.Е.** Справочник по гидравлическим сопротивлениям. М.: Машиностроение, 1992.
7. **Rothfus R.R., Sartory W.K. and Kermode R.I.** Flow in Concentric Annuli at High Reynolds Numbers. A.I.Ch.E. Journal. 1966. V. 12. № 6. P. 1086–1091.
8. **Kasagi N., Kawara S. and Matsunaga A.** Turbulence measurement in a separated and reattaching flow over a backward-facing step with the aid of three-dimensional particle tracking velocimetry, The Symposium of the Society of Instrument and Control Engineers (1991).
9. **Михин В.И.** Второго порядка k-ε модель турбулентности// VI Международный конгресс по математическому моделированию. Сентябрь 20–26, 2004, Нижний Новгород, Россия.